

Lista 2

(poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = (-3x + 41)/(x - 13), \text{ dla } x \neq 13.$$

Uwaga: W kartezjańskim układzie współrzędnych punktem kratowym nazywamy punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Zad. 2 (3 pkt.) Oblicz a^{b+1} , jeżeli $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ oraz $b = 3 (\log_7 6) : (\log_7 8)$.

Zad. 3 (3 pkt.) Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{5^{-n} + 2^n}$.

Zad. 4 (3 pkt.) Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zad. 5 (4 pkt.) Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja kwadratowa

$$f(x) = mx^2 + (m - 1)x + 1 - 2m, \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \text{ ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o wartość równą 1.}$$

Zad. 6 (4 pkt.) Wyznacz wzór na n -ty wyraz nieskończonego malejącego ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$, jeżeli suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych wynosi 6 oraz $(a_5 + a_3) : a_3 = 29 : 25$.

Zad. 7 (4 pkt.) Jaka jest najmniejsza wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^4 + 0,5 \cdot (2x + 1)^4, \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zad. 8 (4 pkt.) Miejscowości A, B, C tworzą na mapie trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna $|AB| = 15\text{km}$ oraz przyprostokątna $|AC| = 20\text{km}$. Piotr wyruszył z miejscowości A do C o godzinie 11:00 i maszerował z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył Paweł i szedł z prędkością 2 km/h. Wyznacz godzinę, o której odległość między Pawłem i Piotrem będzie najmniejsza.